Circunferencia de Apolonio

La **circunferencia de Apolonio**, se trata de un famoso problema de lugares geométricos:

Dados dos puntos A y B, se trata de determinar el lugar geométrico de los puntos del plano P que cumplen: PA/PB = r, siendo r una constante.

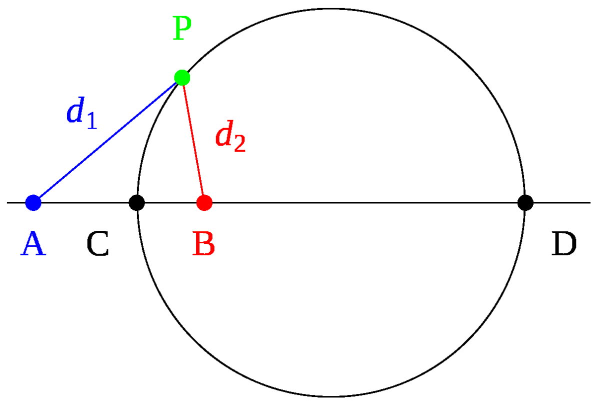


Figura 1: definición de un círculo por Apolonio

En el caso r = 1 es fácil comprobar que el lugar geométrico descrito por el punto P es la recta mediatriz del segmento determinado por A y B.

En el caso general (r distinto de 1) el lugar geométrico es una circunferencia de radio "k" cuyo centro está sobre el segmento AB. Esta circunferencia se conoce con el nombre de circunferencia de Apolonio de los puntos A y B para la razón r.

Además, se cumple que $r^2 = OA \cdot OB$, siendo r el radio de la circunferencia de Apolonio de centro O; lo que significa que los puntos A y B son inversos respecto de la circunferencia de Apolonio. Por ello los puntos A, B y los dos puntos M y N que se obtienen como intersección de la circunferencia de Apolonio con la recta determinada por A y B constituyen una cuaterna armónica.

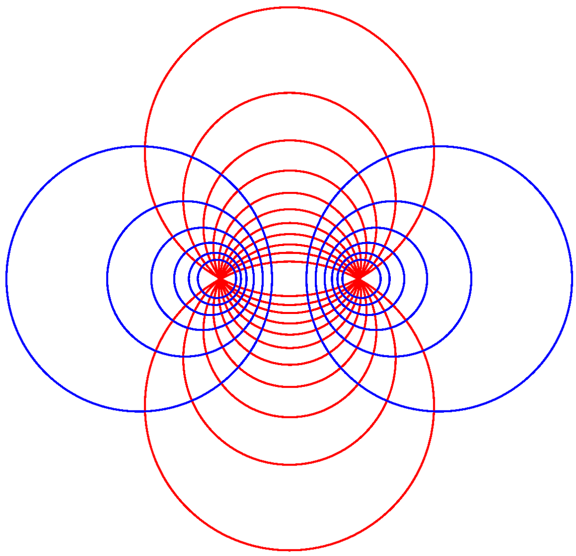


Figura 2: un set de círculos de Apolonio. Cada círculo celeste se interseca con cada círculo rojo en un ángulo recto, y viceversa. Cada círculo rojo pasa a través de dos focos, correspondiendo a los puntos **A** y **B** en la Figura 1

Demostración 1

a) Consideremos un punto P, no alineado con A y B, que cumpla la propiedad. Si consideramos el triángulo APB, sabemos por el teorema de las bisectrices que si M y N son los puntos en los que las bisectrices, interna y externa, del ángulo P cortan a la recta AB, se cumple que r = AP/PB = AM/MB = AN/BN. Resulta así que para cualquier punto P los puntos M y N son fijos y, además, por ser MP y PN bisectrices, el ángulo <MPN es recto. Por ello P está sobre la circunferencia de diámetro MN.

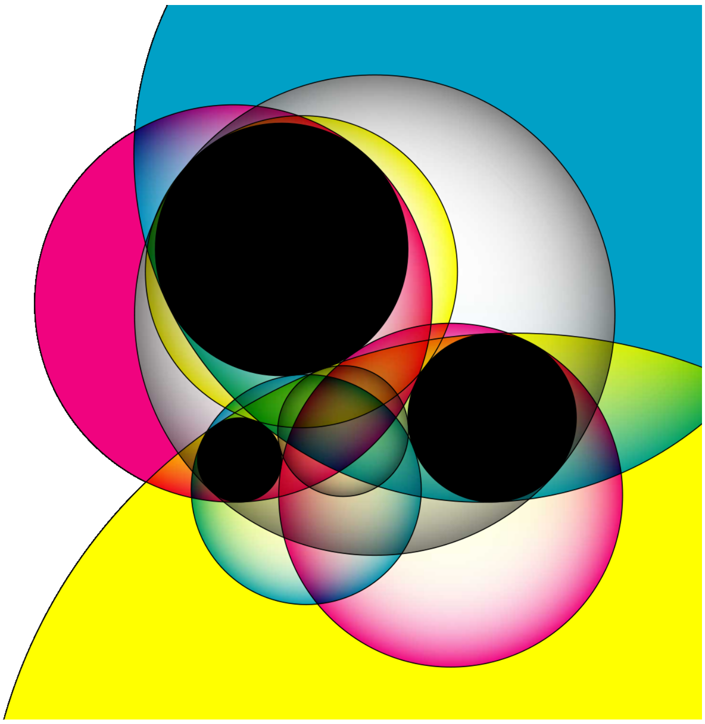
b) Veamos que todo punto P perteneciente a la circunferencia de diámetro MN, donde AM/MB = AN/BN = r, cumple: AP/PB = r. La recta simétrica de PA respecto a PM corta a la recta AB en B', siendo PM y PN las bisectrices de <APB' (PM por la construcción realizada, y PN por ser perpendicular a PM). Por el teorema de la bisectriz sabemos que AP/PB' = AM/MB' = AN/B'N. De la última igualdad, teniendo en cuenta que AM/MB = AN/BN = r, se deduce que B' = B. De aquí resulta que AP/PB = r

Demostración 2

La demostración consta de dos partes: a) si P cumple la propiedad está sobre la circunferencia mencionada, b) si P es un punto de dicha circunferencia cumple la propiedad PA/PB = r.

a) Considermos un punto P que cumpla la propiedad del lugar geométrico y que no esté alineado con A y B (PA/PB = r). Dibujamos la circunferencia que contiene a A, B y P. Por P trazamos la recta tangente a dicha circunferencia obteniendo el punto O como intersección de la tangente con la recta determinada por A y B. Podemos observar que el ángulo <PAB, inscrito en la circunferencia, y el ángulo semiinscrito <BPO son iguales (abarcan el mismo arco de circunferencia). De aquí deducimos que los triángulos APO y BPO son semejantes ya que tienen un ángulo común (<O), los ángulos <PAB y <BPO coinciden y tienen un lado común: PO. Por ello : OA/OP = OP/OB = AP/PB = r. Multiplicando los dos primeros miembros de las igualdades anteriores obtenemos: (OA/OP)(OP/OB) = r2, es decir: OA/OB = r2. Como O es exterior al segmento AB resulta que O es un punto fijo de la recta AB, independiente de P. También tenemos que OA · OB es constante. Si designamos OA · OB por k2 (OA · OB = k2), tenemos: OP2= k2, por lo que P está sobre la circunferencia de centro O y radio k. (Observación: el caso de P alineado con A y B tiene dos posibilidades que se estudian directamente respecto al punto O obtenido, y se comprueba que también están sobre la circunferencia de Apolonio)

b) Supongamos ahora que un punto P se encuentra situado sobre la circunferencia de centro O y cumple OP2 = OA · OB. De aquí obtenemos OP/OB = OA/OP. De la proporcionalidad anterior y de la igualdad del ángulo en O deducimos que los triángulos OAP y OBP son semejantes. Por ello: OP/OB = OA/OP = PA/PB = r. Veamos que r es un valor constante que no depende del punto P de la circunferencia. Multiplicando los primeros miembros de las igualdades resulta (OP/OB)(OA/OP) = r2, OA/OB = r2. Como O, A y B son fijos también lo es r2 y por tanto también "r".



El problema de Apolonio puede tener hasta ocho soluciones. Los tres círculos se muestran en negro, y la solución en colores

Bibliografía

- "Geometría Métrica" de Puig Adam
- "Geometry, a comprehensive course", de Dan Pedoe. Ed. Dover

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Circunferencia de Apolonio**. Commons

Fuentes y contribuyentes del artículo

Circunferencia de Apolonio *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64969765 *Contribuyentes*: Escafondrex, Ggenellina, Ileana n, Juan Mayordomo, Rosarinagazo, Sabbut, 1 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Archivo:Apollonius circle definition labels.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Apollonius_circle_definition_labels.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: AnonMoos, Limaner, Tano4595

Archivo:Apollonian circles.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Apollonian_circles.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: WillowW (original); Pbroks13 (redraw)

Archivo:Apollonius8ColorMultiplyV2.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Apollonius8ColorMultiplyV2.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: Melchoir

Archivo:Commons-logo.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Commons-logo.svg *Licencia*: logo *Contribuyentes*: SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.

Licencia